

MATH-S4 TP2 - Comment approcher des intégrales par des formules de quadrature ?

Il est recommandé de tout lire avant de commencer. Les informations sur le travail à rendre se trouvent à la fin du sujet.

1 Objectifs

L'objectif de ce TP est d'approcher numériquement l'intégrale suivante :

$$I = \int_a^b f(x)dx, \text{ avec } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \text{ } a = 0 \text{ et } b = 1 \quad (1)$$

Vous implémenterez trois méthodes de quadrature (rectangles à gauche, points milieux, et trapèzes) et vous évaluerez leur convergence et leur performance.

2 Méthodes de quadrature

1. Créez la fonction `intRectG(f, a, b, n)` qui calcule une approximation numérique Q_n de $I = \int_a^b f(x)dx$, en utilisant la méthode des rectangles à gauche pour n sous-intervalles de longueur h entre a et b .
2. Créez la fonction `intPointsM(f, a, b, n)` qui calcule une approximation numérique Q_n de $I = \int_a^b f(x)dx$, en utilisant la méthode des points milieux pour n sous-intervalles de longueur h entre a et b .
3. Créez la fonction `intTrap(f, a, b, n)` qui calcule un approximation numérique Q_n de $I = \int_a^b f(x)dx$, en utilisant la méthode des trapèzes pour n sous-intervalles de longueur h entre a et b .

3 Étude de convergence

Créez un script `test1.m` qui aura pour but d'étudier la convergence des cinq méthodes de quadrature considérées.

1. Calculez analytiquement l'expression de $I = \int_a^b f(x)dx$.
2. Représentez dans une figure le logarithme de l'erreur de la quadrature $\log_{10} |I - Q_n|$ pour les cinq méthodes en fonction du logarithme de $h = \frac{b-a}{n}$. Vous pouvez considérer les valeurs de n suivantes

$$n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768.$$

Quelles sont les pentes des courbes obtenues ? Commentez les résultats.

4 Étude de performance

Créez un script `test2.m` qui aura pour but d'étudier la performance des cinq méthodes de quadrature considérées.

1. Représentez dans une figure le nombre d'évaluations de $f(x)$ réalisées en fonction de n pour les cinq méthodes. Vous pouvez considérer les mêmes valeurs de n que pour l'étude de convergence.
2. Représentez dans une autre figure le temps de calcul en fonction de n pour les cinq méthodes. Vous pouvez considérer les mêmes valeurs de n que pour l'étude de convergence. Pour mesurer les temps de calcul, vous pouvez utiliser les commandes Matlab `tic` et `toc`.

5 Conclusion

1. En tenant compte des résultats des deux études, quelle est, d'après vous, la méthode de quadrature la plus appropriée pour la fonction $f(x)$?
2. Identifiez deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ pour lesquelles les méthodes de quadrature optimales respectives, en termes de convergence et de performance, soient différentes de celle trouvée pour la fonction $f(x)$.

6 Compte rendu

Vous rédigerez un rapport synthétisant de manière logique vos diverses observations et réponses aux questions. Vous déposerez sur moodle votre rapport, en format pdf, ainsi qu'un dossier compressé contenant les différents fonctions et scripts que vous aurez créés.

7 Références

- [1] Matworks. *Chapitre 6 - Quadrature*. n.d. Retrieved from <https://www.mathworks.com/content/dam/mathworks/mathworks-dot-com/moler/quad.pdf>