TD 2 : Dirac, convolution et echantillonage

Julie Coloigner, IRISA, julie.coloigner@irisa.fr
ESIR 2/3 option Ingénierie Biomédicale
M2 EEA parcours SISEA option Signal/Image

Université de Rennes1

Exercice 1 : Impulsion de Dirac

On appelle impulsion de Dirac la fonction $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

et telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

L'impulsion de Dirac est ainsi une impulsion infiniment fine, d'amplitude infinie, et d'aire unité.
On définit aussi

$$x(t) = e^{2i\pi tf}$$

1. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)dt$.
2. Calculer la transformée de Fourier de $\delta(t)$.
3. Calculer $x * \delta(t-a)$.
4. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t-a)+\delta(t+a)}{2} x(t)dt$.

Exercice 2 : Peigne de Dirac

Soit x et y l'entrée et la sortie d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle h, avec $x(t) = \frac{1}{\tau}\mathbb{1}_{[0,\tau]}$, $h(t) = \sum \delta(t - k.T)$ avec $T \geq \tau$ et $y(t) = (h * x)(t)$.

1. Calculer $y(t)$. Représenter $x(t)$, $h(t)$ et $y(t)$.
2. Calculer les spectres $X(f)$, $H(f)$ et $Y(f)$. Représenter $X(f)$, $H(f)$ et $Y(f)$.
3. Quel est l'effet de la convolution temporelle de $x(t)$ par le peigne de Dirac sur le spectre $Y(f)$.
4. Que se passe t'il lorsque $\tau \to 0$ et lorsque $\tau = T$.

Exercice 3 : Série de Fourier

1. Après avoir exprimé un signal périodique sous forme de série de Fourier, calculer sa transformée de Fourier.

2. Calculer la série de Fourier d'une impulsion rectangulaire

$$x(t) = A\mathbb{1}_{[-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}]}(t)$$

Exercice 4 : Echantillonnage

Soit un signal $x(t) = 2cos(2\pi f_0 t)$. Calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$ avec 1/ $f_e = 4f_0$ et 2/ $f_e = \frac{f_0}{2}$.